Arkusz 1.

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	**A**	**D**	**C**	**C**	**B**	**C**	**C**	**C**	**D**	**C**	**B**	**A**	**A**	**A**	**C**	**A**	**B**	**D**	**D**	**C**	**A**	**C**	**A**	**C**

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0-2)

Rozwiąż nierówność: $2-\frac{1-x^2}{2} \geq \frac{1}{2}(3x+1)$

Rozwiązanie

$$4-1+x^2 \geq 3x+1$$
$$x^2-3x+2 \geq 0$$

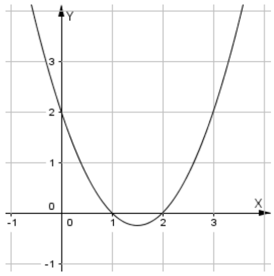
Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego x^2-3x+2.

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1,\ \sqrt{\Delta}=1,$$
$$x_1=\frac{3-1}{2\cdot 1}=1,\ x_2=\frac{3+1}{2\cdot 1}=2.$$

Możemy również obliczyć pierwiastki trójmianu kwadratowego x^2-3x+2, rozkładając go na czynniki liniowe

$$x^2-3x+2=x^2-x-2x+2=x(x-1)-2(x-1)=(x-1)(x-2)$$
$$x-1=0 \text{ lub } x-2=0$$
$$x=1 \text{ lub } x=2$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y=x^2-3x+2$,



z którego odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności

$$x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 2; +\infty)$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1p.

gdy

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1=1$, $x_2=2$ i na tym zakończy lub błędnie poda zbiór rozwiązań nierówności, albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $(x-1)(x-2)$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

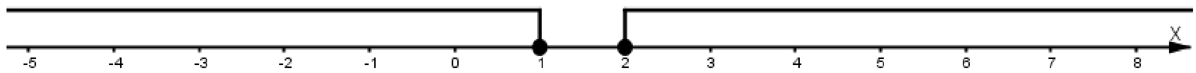
Zdający otrzymuje .... 2p.

gdy

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 2; +\infty)$ lub $(-\infty; 1\rangle \cup \langle 2; +\infty)$ lub ($x \le 1$ lub $x \ge 2$),

albo

- poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Zadanie 27. (0-2)

Przedział $(-\infty; 3\rangle$ jest maksymalnym zbiorem, w którym funkcja $f(x) = -2x^2 + bx - 16$ jest rosnąca. Wyznacz największą wartość tej funkcji.

Rozwiązanie

Przedział $(-\infty; 3\rangle$ jest maksymalnym zbiorem, w którym funkcja f jest rosnąca, więc argument $x = 3$ jest pierwszą współrzędną wierzchołka $W = (p, q)$ paraboli będącej wykresem tej funkcji.

(I sposób rozwiązania)

$$p = 3,$$

$$-\frac{b}{2a} = 3,$$

$$\frac{b}{4} = 3, \text{ więc } b = 12,$$

stąd: $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$.

Największą wartością funkcji jest $y_{MAX} = f(3)$.

$$f(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 16$$

$$f(3) = -18 + 36 - 16 = 2$$

Największa wartość funkcji można obliczyć również korzystając z odpowiednich wzorów:

$$y_{MAX} = q, \text{ gdzie } q = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$\Delta = 12^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-16) = 144 - 128 = 16$$

$$q = \frac{-16}{4\cdot(-2)} = \frac{-16}{-8} = 2$$

Odpowiedź: Największą wartością funkcji jest $y_{MAX} = 2$.

Rozwiązanie

(II sposób rozwiązania)

Zapisujemy wzór funkcji w postaci kanonicznej

$$f(x) = -2(x-3)^2 + q,$$

$$f(x) = -2(x^2 - 6x + 9) + q$$

$$f(x) = -2x^2 + 12x - 18 + q$$

Zatem:
$$-18 + q = -16$$

$$q = 2$$

Odpowiedź: Największą wartością funkcji jest $y_{MAX} = 2$.

Schemat oceniania

(I sposób rozwiązania)

Zdający otrzymuje .... 1p.

gdy

- wskaże wartość pierwszej współrzędnej wierzchołka $p = 3$ oraz obliczy wartość współczynnika $b = 12$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu współczynnika b i konsekwentnie do obliczonej wartości b obliczy największą wartość funkcji.

Zdający otrzymuje .... 2p.

gdy

obliczy największa wartość funkcji $y_{MAX} = 2$.

(II sposób rozwiązania)

Zdający otrzymuje .... 1p.

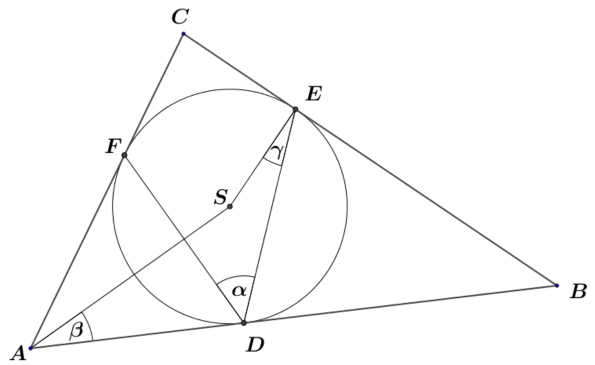
gdy zapisze trójmian kwadratowy w postaci $f(x) = -2(x-3)^2 + q$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2p.

gdy obliczy największa wartość funkcji $y_{MAX} = 2$.

Zadanie 28 (dowód geometryczny)

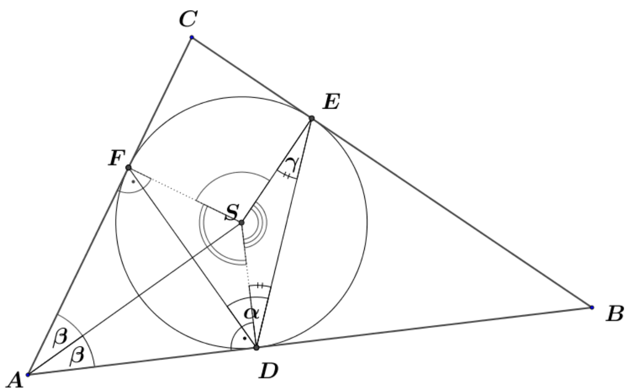
W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku S, który jest styczny do boków trójkąta w punktach D, E i F (tak jak na rysunku). Uzasadnij, że $\alpha = \beta + \gamma$.



Dowód

Odcinki SD, SE, SF są prostopadłe do boków trójkąta.

(I sposób rozwiązania)



$|DS| = |ES|$, zatem trójkąt DES jest równoramienny, stąd $|\angle EDS| = \gamma$.

Odcinek AS zawiera się w dwusiecznej kąta $\angle BAC$, więc $|\angle SAF| = \beta$.

Zauważmy, że

- kąt wypukły $\angle DSF$ ma miarę: $|\angle DSF| = 360^0 - (90^0 + 90^0 + 2\beta) = 180^0 - 2\beta$,
- kąt wypukły $\angle ESF$ ma miarę: $|\angle ESF| = 2\alpha$, (kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany $|\angle EDF| = \alpha$),
- kąt wypukły $\angle ESD$ ma miarę: $|\angle ESD| = 180^0 - 2\gamma$,

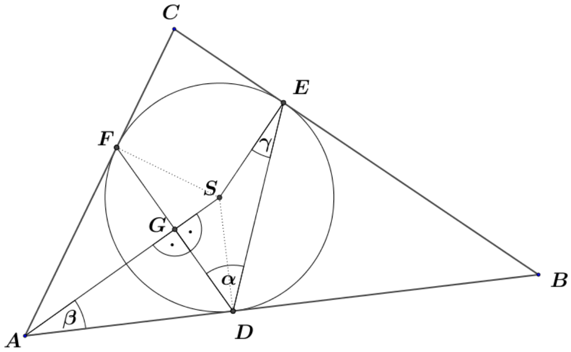
$$|\angle DSF| + |\angle ESF| + |\angle ESD| = 360^0,$$

$$180^0 - 2\beta + 2\alpha + 180^0 - 2\gamma = 360^0,$$

$$-2\beta + 2\alpha - 2\gamma = 0,$$

więc $\alpha = \beta + \gamma$, co należało uzasadnić.

(II sposób rozwiązania)



$|DS|=|ES|$, zatem trójkąt DES jest równoramienny, stąd $|\angle EDS|=\gamma$.

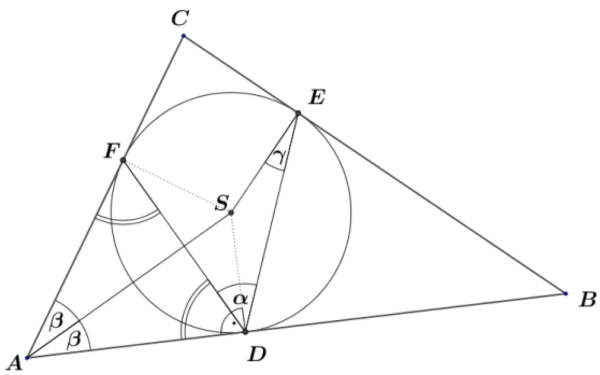
Odcinek AS zawiera się w dwusiecznej kąta $\angle BAC$, więc $|\angle SAF|=\beta$.

Trójkąt DFA jest równoramienny ($|AD|=|AF|$), więc odcinek AG jest wysokością trójkąta DFA, stąd $|\angle SGD|=90^0$.

Trójkąt ASD jest podobny do trójkąta DSG, gdyż są trójkąty prostokątne, w których kąty ostre $\angle DSG$ i $\angle ASD$ mają równe miary. Wynika stąd, że $|\angle SDG|=|\angle SAD|=\beta$.

$|\angle EDF|=|\angle SDG|+|\angle EDS|$, więc $\alpha=\beta+\gamma$, co należało uzasadnić.

(III sposób rozwiązania)



$|DS|=|ES|$, zatem trójkąt DES jest równoramienny, stąd $|\angle EDS|=\gamma$.

Odcinek AS zawiera się w dwusiecznej kąta $\angle BAC$, więc $|\angle SAF|=\beta$.

Trójkąt DFA jest równoramienny ($|FA|=|DA|$), więc $|\angle FDA|=|\angle DFA|=\dfrac{180^0-2\beta}{2}=90^0-\beta$

$$|\angle SDA|=90^0,\text{ więc } |\angle SDF|=90^0-|\angle FDA|.$$

$$|\angle SDF|=90^0-(90^0-\beta)=\beta$$

$|\angle EDF|=|\angle FDS|+|\angle SDE|$, więc $\alpha=\beta+\gamma$, co należało uzasadnić.

Schemat punktowania

(I sposób rozwiązania)

Zdający otrzymuje ....1p.

- gdy uzasadni, że $|\angle EDS| = \gamma$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- gdy zapisze, że $|\angle DSF| = 180^0 - 2\beta$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- zapisze, że $|\angle ESF| = 2\alpha$ oraz $|\angle DAF| = 2\beta$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2p.

gdy uzasadni, że $\alpha = \beta + \gamma$.

(II i III sposób rozwiązania)

Zdający otrzymuje ....1p.

gdy uzasadni, że $|\angle EDS| = \gamma$ lub $|\angle FDS| = \beta$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2p.

gdy uzasadni, że $\alpha = \beta + \gamma$.

Zadanie 29. (0-2)

Udowodnij, że nierówność $(x+y)^2 + 10 \geq 2(x-3y+xy)$ jest spełniona dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y.

Rozwiązanie

(I sposób)

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$(x+y)^2 + 10 \geq 2(x-3y+xy)$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + 10 \geq 2x - 6y + 2xy$$
$$x^2 + y^2 + 10 - 2x + 6y \geq 0$$
$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) \geq 0$$
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 \geq 0$$

Lewa strona tej nierówności jest sumą dwóch liczb nieujemnych (kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny), więc to dowodzi, że nierówność $(x+y)^2 + 10 \geq 2(x-3y+xy)$ jest spełniona dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y.

To kończy dowód.

(II sposób)

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$(x+y)^2 + 10 \geq 2(x-3y+xy)$$

$$x^2+2xy+y^2+10\geq 2x-6y+2xy$$
$$x^2-2x+y^2+6y+10\geq 0$$

Potraktujmy tę nierówność jako zwykłą nierówność kwadratową z niewiadomą x.

Aby nierówność ta była spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste wyróżnik trójmianu musi być niedodatni, tzn: $\Delta\leq 0$.

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(y^2+6y+10)$$
$$\Delta=4-4y^2-24y-40=-4y^2-24y-36$$
$$\Delta=-4(y^2+6y+9)$$
$$\Delta=-4(y+3)^2$$
$$\Delta=-4(y+3)^2$$

$\Delta\leq 0$ dla dowolnych $y\in R$, więc nierówność $x^2-2x+y^2+6y+10\geq 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x i y.

To kończy dowód.

Schemat oceniania

(I sposób rozwiązania)

Zdający otrzymuje ....1p.

gdy doprowadzi nierówność do postaci $(x-1)^2+(y+3)^2\geq 0$,

Zdający otrzymuje ....2p.

gdy przeprowadzi pełny dowód.

(II sposób rozwiązania)

Zdający otrzymuje ....1p.

- gdy doprowadzi nierówność do postaci $x^2-2x+y^2+6y+10\geq 0$ i prawidłowo wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta=-4y^2-24y-36$,

albo

- gdy doprowadzi nierówność do postaci $y^2+6y+x^2-2x+10\geq 0$ i prawidłowo wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta=-4x^2+8x-4$.

Zdający otrzymuje ....2p.

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadanie 30. (0-2)

W pudełku znajduje się siedem kul ponumerowanych od 1 do 7. Losujemy kolejno dwie kule, bez zwracania, zapisując wyniki w liczbę dwucyfrową. Pierwsza wylosowana liczba jest cyfrą jedności, druga cyfrą dziesiątek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 3 lub przez 5.

Rozwiązanie

(I sposób)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe o różnych cyfrach ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 7 \cdot 6 = 42$$

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby, która jest podzielna przez 3 lub przez 5.

$$A = \{12,15,21,24,25,27,35,36,42,45,51,54,57,63,65,72,75\}$$

$$\overline{\overline{A}} = 17$$

Obliczamy prawdopodobieństwo korzystając z definicji klasycznej prawdopodobieństwa

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

$$P(A) = \frac{17}{42}$$

(II sposób)

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby, która jest podzielna przez 3 lub przez 5.

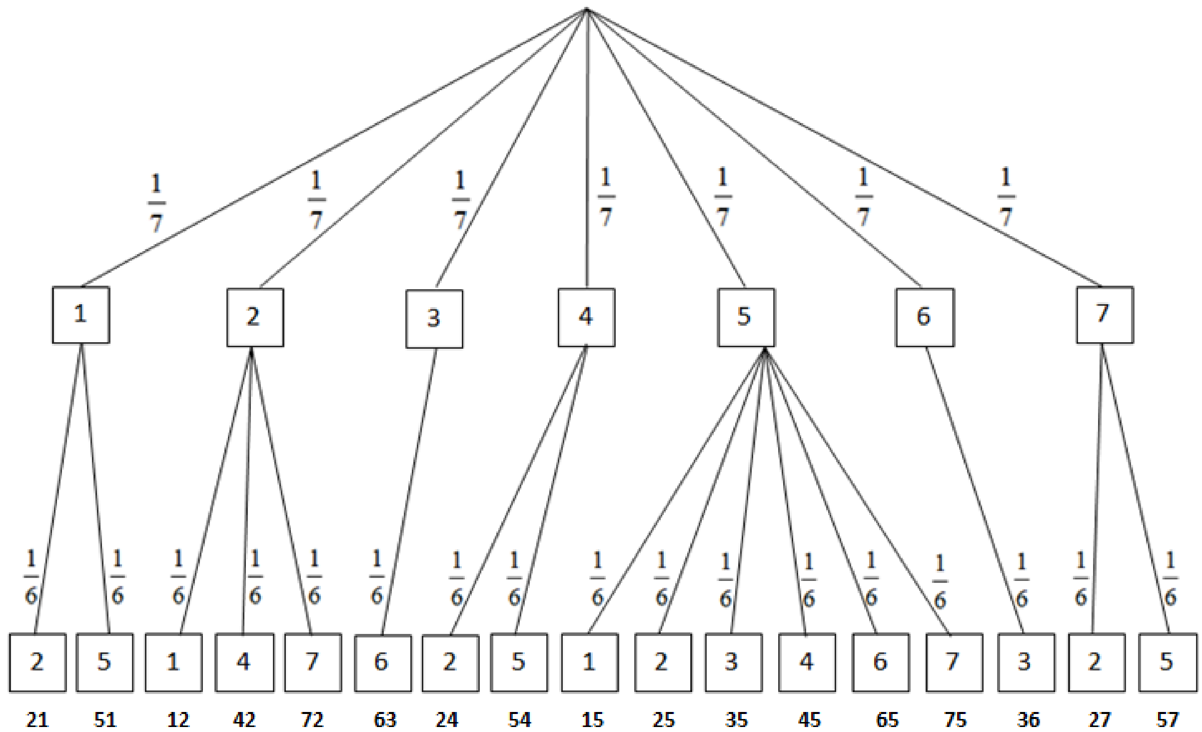
Zbiór zdarzeń elementarnych można zilustrować tabelą 7 na 7 i zaznaczyć zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	**X**	**21**	31	41	**51**	61	71
2	**12**	**X**	32	**42**	52	62	**72**
3	13	23	**X**	43	53	**63**	73
4	14	**24**	34	X	**54**	64	74
5	**15**	**25**	**35**	**45**	**X**	**65**	**75**
6	16	26	**36**	46	56	**X**	76
7	17	**27**	37	47	**57**	67	**X**

Łatwo zauważyć, że $\overline{\overline{\Omega}} = 42$ i $\overline{\overline{A}} = 17$, więc $P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \dfrac{17}{42}$

(III sposób)

Rysujemy drzewo z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjających zdarzeniu A (polegającemu na tym, że otrzymana liczba będzie podzielna przez 3 lub przez 5).



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $P(A)=17\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{17}{42}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1p.

- gdy zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $\overline{\overline{\Omega}}=6\cdot 7$,

albo

- gdy wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A,

albo

- gdy zapisze liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $\overline{\overline{A}}=17$,

albo

- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie) .

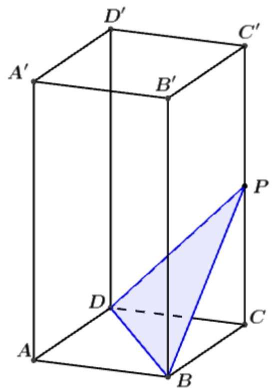
Zdający otrzymuje ....2p.

gdy wyznaczy prawdopodobieństwo zdarzenia $P(A)=\frac{17}{42}$.

Uwaga.

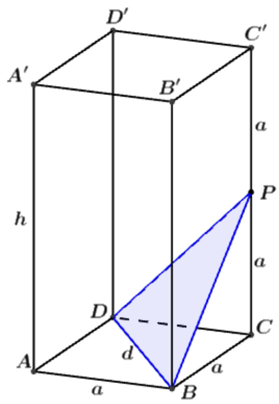
1. jeżeli zdający poda prawdopodobieństwo zdarzenia A większe od 1, to za całe zadanie otrzymuje **0p**,
2. jeżeli zdający pominie jedno zdarzenie sprzyjające zdarzeniu A lub pominie jedną istotną gałąź drzewa i otrzyma $P(A)=\frac{16}{42}=\frac{8}{21}$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **1p**.

Zadanie 31. (0-2)



Graniastosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy BD i punkt P, który jest środkiem krawędzi bocznej CC' (rysunek obok). Oblicz stosunek objętości brył, na jakie płaszczyzna ta podzieliła ten graniastosłup.

Rozwiązanie



Wprowadźmy oznaczenia:

a - krawędź podstawy graniastosłupa, h – wysokość graniastosłupa.

Zauważmy, że $|CP| = a$.

$$h = 2a,$$

Wprowadźmy oznaczenia:

V - objętość graniastosłupa,

V_1 - objętość ostrosłupa $DBCP$,

V_2 - objętość bryły, która powstała po odcięciu ostrosłupa $DBCP$ od graniastosłupa $ABCDA'B'C'D'$.

$$V = a^2 h \text{, więc}$$
$$V = 2a^3$$

Zapiszmy objętości V_1:

Podstawą ostrosłupa $BCDP$ jest trójkąt BCD, więc $P_{BCD} = \frac{1}{2}a^2$, wysokością ostrosłupa jest odcinek CP o długości a, zatem

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a,$$
$$V_1 = \frac{1}{6} a^3 \quad ,$$

Zapiszmy objętość V_2:

$$V_2 = V - V_1$$
$$V_2 = 2a^3 - \frac{1}{6}a^3$$
$$V_2 = \frac{11}{6}a^3,$$

Obliczmy stosunek objętości brył:
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{11}{6}a^3}{\frac{1}{6}a^3}$$
$$\frac{V_2}{V_1} = 11$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1p.

gdy

- zapisze, że $V_1 = \frac{1}{6}a^3$ i $V = 2a^3$,

albo

- zapisze, że $V_1 = \frac{1}{12}a^2h$ i $V = a^2h$,

albo

- zapisze, że $V_1 = \frac{1}{12}V$.

Zdający otrzymuje ....2p.

gdy obliczy stosunek objętości $\frac{V_2}{V_1} = 11$ lub $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{11}$.

Zadanie 32. (0-4)

Liczby: $10x+2$, 80, $2x+58$, w podanej kolejności, są odpowiednio dziesiątym, jedenastym i czternastym wyrazem nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznacz sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem arytmetycznym o różnicy r, w którym $a_{10} = 10x+2$, $a_{11} = 80$, $a_{14} = 2x+58$

Z treści zadania i definicji ciągu arytmetycznego wynika, że

$$\begin{cases} r = a_{11} - a_{10} \\ 3r = a_{14} - a_{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 80 - (10x+2) \\ 3r = 2x + 58 - 80 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu otrymujemy:

$$\begin{cases} x = 8 \\ r = -2 \end{cases}$$

Wiedząc, że $a_{11} = 80$ otrzymujemy:

$$a_1 + (11-1)\cdot r = 80$$
$$a_1 + 10\cdot(-2) = 80$$
$$\underline{a_1 = 100}$$

$$a_n = 100 + (n-1)\cdot(-2)$$
$$a_n = 100 - 2n + 2$$
$$\underline{a_n = -2n + 102}$$

Wyznaczmy wszystkie wyrazy ciągu (a_n), które są dodatnie.

$$-2n+102>0$$
$$-2n>-102$$
$$n<51$$

Są to więc wyrazy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{50}$. Suma wszystkich tych wyrazów jest więc równa

$$S_{50}=\frac{a_1+a_{50}}{2}\cdot 50$$
$$S_{50}=\frac{100+(-2\cdot 50+102)}{2}\cdot 50=2550$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający

- zapisze układ, np.: $\begin{cases} r=80-(10x+2) \\ 3r=2x+58-80 \end{cases}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- zapisze równanie pozwalające wyznaczyć x, np.: $80-(10x+2)=\dfrac{2x+58-80}{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2p.

Zdający wyznaczy $r=-2$ oraz $x=8$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3p.

Zdający

- obliczy wyraz $a_1=100$ i zapisze warunek pozwalający wyznaczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n), np.: $-2n+102>0$,

albo

- rozwiąże zadanie do końca, ale z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne..4p.

Zdający wyznaczy sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n): $S_{50}=2550$

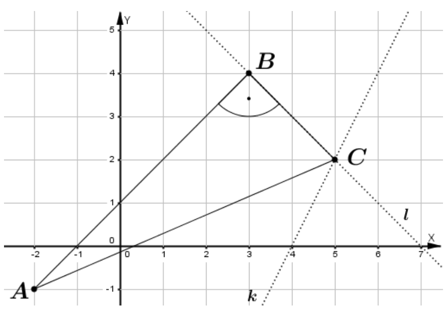
Zadanie 33. (0-4)

Trójkąt ΔABC jest prostokątny, gdzie $|\angle ABC|=90^0$. Punkt $A=(-2,-1)$, $B=(3,4)$, a punkt C leży na prostej k o równaniu $y=2x-8$. Wyznacz współrzędne punktu C oraz pole tego trójkąta.

Rozwiązanie (I sposób)

Wyznaczmy współczynnik kierunkowy a_1 prostej AB.

$$a_1=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$
$$a_1=\frac{4-(-1)}{3-(-2)}$$
$$a_1=1$$



Trójkąt ABC jest prostokątny, więc prosta BC (oznaczona na rysunku literą l) jest prostopadła do prostej AB . Oznaczmy przez a_2 współczynnik kierunkowy prostej l , zatem

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$
$$a_2 = -1$$

Wyznaczmy równanie prostej l .

$$l: y = -x + b$$
$$4 = -3 + b$$
$$b = 7$$
$$\underline{l: y = -x + 7}$$

Wyznaczmy współrzędne punktu C , który jest punktem wspólnym prostej l i k .

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$
$$\underline{C = (5, 2)}$$

Obliczmy długości odcinków AB oraz BC .

$$|AB| = \sqrt{(3-(-2))^2 + (4-(-1))^2}$$
$$|AB| = \sqrt{5^2 + 5^2}$$
$$|AB| = 5\sqrt{2}$$
$$|BC| = \sqrt{(5-3)^2 + (2-4)^2}$$
$$|BC| = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$$
$$|BC| = 2\sqrt{2}$$

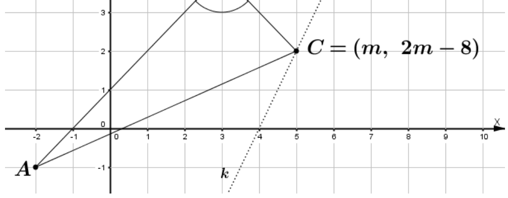
Obliczmy pole trójkąta ΔABC .

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC|$$
$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}$$
$$\underline{P_{\Delta ABC} = 10}$$

Rozwiązanie (II sposób)

Punkt C leży na prostej k o równaniu $y = 2x - 8$, więc istnieje taka liczba $m \in R$, że $C = (m, 2m - 8)$. Trójkąt ABC jest prostokątny, więc

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$



$$\left(\sqrt{(3-(-2))^2 + (4-(-1))^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(m-3)^2 + (2m-8-4)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(m+2)^2 + (2m-8+1)^2}\right)^2$$

$$50 + m^2 - 6m + 9 + 4m^2 - 48m + 144 = m^2 + 4m + 4 + 4m^2 - 28m + 49$$

$$m = 5$$

$$C=(5,\ 2)$$

Obliczmy długości odcinków AB oraz BC.

$$|AB|=\sqrt{(3-(-2))^2+(4-(-1))^2}$$
$$|AB|=\sqrt{5^2+5^2}$$
$$|AB|=5\sqrt{2}$$
$$|BC|=\sqrt{(5-3)^2+(2-4)^2}$$
$$|BC|=\sqrt{2^2+(-2)^2}$$
$$|BC|=2\sqrt{2}$$

Obliczmy pole trójkąta ΔABC.

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|$$
$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$$
$$\underline{P_{\Delta ABC}=10}$$

Schemat oceniania (I sposób)

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej AB ($a_1=-1$).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2p.

- Zdający wyznaczy równanie prostej $l: y=-x+7$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3p.

- Zdający wyznaczy współrzędne punktu $C=(5,\ 2)$.

Rozwiązanie pełne ....4p.

Zdający wyznaczy pole trójkąta ABC ($P_{\Delta ABC}=10$).

Schemat oceniania (II sposób)

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający zapisze, że punkt C leżący na prostej $y=2x-8$ ma współrzędne np.: $(m,\ 2m-8)$, gdzie $m\in R$ oraz $|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2p.

Zdający zapisze równanie

$$\left(\sqrt{(3-(-2))^2+(4-(-1))^2}\right)^2+\left(\sqrt{(m-3)^2+(2m-8-4)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(m+2)^2+(2m-8+1)^2}\right)^2.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3p.

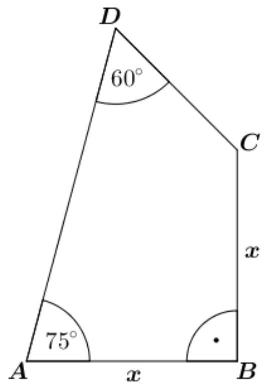
Zdający wyznaczy współrzędne punktu $C=(5,\ 2)$.

Rozwiązanie pełne ....4p.

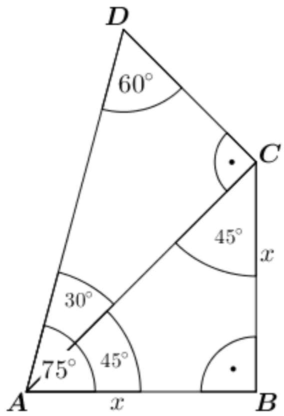
Zdający wyznaczy pole trójkąta ABC ($P_{\Delta ABC}=10$).

Zadanie 34. (0-5)

Pole czworokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku wynosi $18+12\sqrt{3}$. Wyznacz obwód tego czworokąta, jeśli $|AB|=|BC|=x$, $|\angle BAD|=75^0$ i $|\angle ADC|=60^0$.



Rozwiązanie



Zauważmy, że odcinek AC dzieli czworokąt $ABCD$ na dwa trójkąty prostokątne:

- trójkąt ΔABC, w którym $|\angle ABC|=90^0$, $|\angle BAC|=45^0$ i $|\angle BCA|=45^0$,
- trójkąt ΔADC, w którym $|\angle ACD|=90^0$, $|\angle DAC|=30^0$ i $|\angle ADC|=60^0$.

Wyznaczmy długość odcinka AC w zależności od x:

$$\sin 45^0=\frac{|BC|}{|AC|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{x}{|AC|},\text{ więc } |AC|=x\sqrt{2}$$

Wyznaczmy długość odcinka DC w zależności od x:

$$tg30^0=\frac{|DC|}{|AC|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{|DC|}{x\sqrt{2}},\text{ więc } |DC|=\frac{x\sqrt{6}}{3}$$

Wyznaczmy pole trójkąta ABC w zależności od x:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|$$

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}x^2$$

Wyznaczmy pole trójkąta ACD w zależności od x:

$$P_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|CD|$$

$$P_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{2}\cdot\frac{x\sqrt{6}}{3}$$

$$P_{ACD}=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$$

Wyznaczmy pole czworokąta $ABCD$ w zależności od x:

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD}$$

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x^2$$

$$P_{ABCD} = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)x^2$$

Wyznaczmy wartość x:

$$\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)x^2 = 18+12\sqrt{3}$$

$$\left(3+2\sqrt{3}\right)x^2 = 6\left(18+12\sqrt{3}\right)$$

$$\left(3+2\sqrt{3}\right)x^2 = 36\left(3+2\sqrt{3}\right)$$

$$x^2 = 36\text{, więc } x = 6.$$

Wyznaczmy wszystkie długości boków czworokąta $ABCD$.

$$|AB| = |BC| = 6,$$

$$|DC| = 2\sqrt{6}$$

$$\sin 30^0 = \frac{|DC|}{|AD|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{|AD|}$$

$$|AD| = 4\sqrt{6}$$

Wyznaczmy obwód czworokąta $ABCD$.

$$Obw_{ABCD} = 6+6+2\sqrt{6}+4\sqrt{6}$$

$$Obw_{ABCD} = 12+6\sqrt{6} = 6\left(2+\sqrt{6}\right)$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający

- podzieli czworokąt na dwa trójkąty prostokątne i zapisze miary kątów w tych trójkątach,

albo

- zapisze pole trójkąta ABC w zależności od x: $P_{ABC} = \frac{1}{2}x^2$,

albo

- zapisze długość odcinka AC w zależności od x: $|AC| = x\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.

Zdający

- zapisze długość odcinka: $|AC| = x\sqrt{2}$ oraz zapisze pole trójkąta ABC: $P_{ABC} = \frac{1}{2}x^2$,

albo

- zapisze długości odcinków AC i DC:

$$|AC| = x\sqrt{2},\ |DC| = \frac{x\sqrt{6}}{3}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3p.

Zdający

- zapisze równanie pozwalające obliczyć wartość x, np.: $\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)x^2 = 18 + 12\sqrt{3}$

albo

- zapisze pola trójkątów w zależności od x: $P_{ACD} = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2$ i $P_{ABC} = \frac{1}{2}x^2$ oraz zapisze długość odcinka $|AD| = \frac{2\sqrt{6}}{3}x$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4p.

Zdający wyznaczy wartość $x = 6$ oraz zapisze, że $|AD| = \frac{2\sqrt{6}}{3}x$.

Rozwiązanie pełne .... 5p.

Zdający obliczy obwód czworokąta: $Obw_{ABCD} = 12 + 6\sqrt{6}$.

Uwaga.

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu długości x i konsekwentnie do wyznaczonej błędnej watości doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje za całe rozwiązanie **4p**.
2. Jeżeli zdający nie oblicza wartości liczbowej x i zapisze, że obwód czworokąta wynosi $Obw_{ABCD} = 2x + x\sqrt{6}$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **3p**.